Modélisation d'écosystèmes III: stabilité et portrait de phase

UE modélisation et quantification

Céline Casenave
UMR INRA-SupAgro 0729 MISTEA, Montpellier France,
celine.casenave@supagro.inra.fr

Modélisation d'écosystèmes
Plan de la troisième partie

Partie 7: Stabilité des systèmes dynamiques

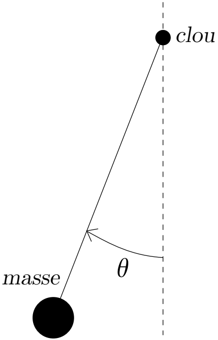
Stabilité des points d'équilibre
Question

Si on est à l'équilibre ($x = x^*$), alors on y reste.

Problème: dans la réalité, il y a des **perturbations** qui font que le système ne reste pas exactement au point d'équilibre.

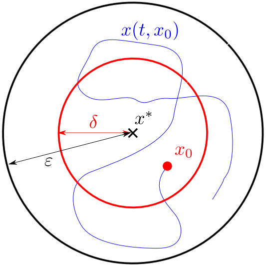
Question: Si le système s'écarte légèrement du point d'équilibre, va-t-il ensuite revenir ou non à ce point d'équilibre?

Exemple du pendule:



Définition: Point d'équilibre stable (au sens de Lyapunov)

1. Un point d'équilibre x^* du système:



$$(1)\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)), & \forall t \in]t_0, \infty[, \\ x(t_0) = x_0, & t_0 \in \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

est dit **stable** si:

- $f(x^*) = 0$
- et si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que:

$$||x_0 - x^*|| \leqslant \delta \Rightarrow ||x(t, x_0) - x^*|| \leqslant \varepsilon, \, \forall t \geqslant t_0,$$

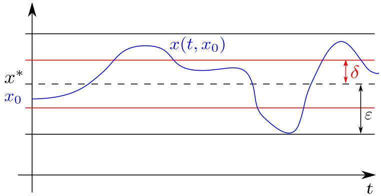
où $x(t, x_0)$ est la solution du système (1) à l'instant t.

Stabilité des points d'équilibre
Définition au sens de Lyapunov

Définition: Point d'équilibre stable (au sens de Lyapunov)

1. Un point d'équilibre x^* du système:

$$(1)\left\{\begin{array}{rcll} \dot{x} & = & f(x(t)), & \forall t \in]t_0, \infty[, \\ x(t_0) & = & x_0, & t_0 \in \mathbb{R}^+, \end{array}\right.$$



est dit **stable** si:

- $f(x^*) = 0$
- et si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que:

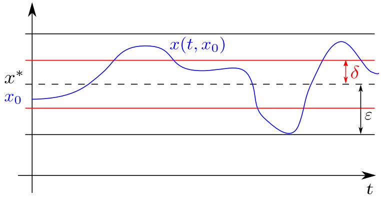
$$||x_0 - x^*|| \leqslant \delta \Rightarrow ||x(t, x_0) - x^*|| \leqslant \varepsilon, \ \forall t \geqslant t_0,$$

où $x(t, x_0)$ est la solution du système (1) à l'instant t.

Définition: Point d'équilibre stable (au sens de Lyapunov)

1. Un point d'équilibre x^* du système:

$$(1)\left\{\begin{array}{rcll} \dot{x} & = & f(x(t)), & \forall t \in]t_0, \infty[, \\ x(t_0) & = & x_0, & t_0 \in \mathbb{R}^+, \end{array}\right.$$



est dit **stable** si:

- $f(x^*) = 0$
- et si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que:

$$||x_0 - x^*|| \leqslant \delta \Rightarrow ||x(t, x_0) - x^*|| \leqslant \varepsilon, \forall t \geqslant t_0,$$

où $x(t, x_0)$ est la solution du système (1) à l'instant t.

2. Un point d'équilibre x^* du système (1) est dit **instable** si il n'est pas stable.

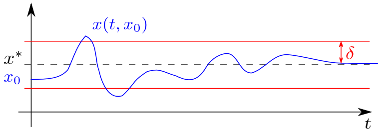
Stabilité des points d'équilibre
Stabilité asymptotique

Question: si x^* est stable, $x(t)$ va-t-il tendre vers x^*?

Définition: Point d'équilibre asymptotiquement stable

Un point d'équilibre x^* du système (1) est dit **asymptotiquement stable** (A.S.):

- si il est stable,
- et si $\exists \delta > 0$ tel que:



$$||x_0 - x^*|| \leqslant \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = x^* \Leftrightarrow \lim_{t \to \infty} ||x(t) - x^*|| = 0.$$

On appelle **bassin d'attraction** du point d'équilibre x^* l'ensemble des valeurs de x_0 à partir desquelles la trajectoire solution va converger vers le point d'équilibre x^*.

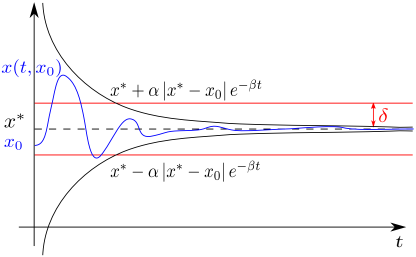
Stabilité des points d'équilibre
Stabilité exponentielle

Question: si x^* est A.S, à quelle vitesse $x(t)$ va converger vers x^*?

Définition: Point d'équilibre exponentiellement stable (au sens de Lyapunov)

Un point d'équilibre x^* du système (1) est dit **exponentiellement stable** (E.S.):

- si il est stable,
- et si $\exists\, \delta, \alpha, \beta > 0$ tels que:



$$||x_0 - x^*|| \leqslant \delta \Rightarrow ||x(t) - x^*|| \leqslant \alpha ||x_0 - x^*|| e^{-\beta t}, \forall t \geqslant t_0.$$

Remarque: un point d'équilibre E.S. est nécessairement A.S.

Stabilité des points d'équilibre
Critère de stabilité: cas linéaire scalaire réel

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (1)$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Solution:

$$x(t) = x_0 e^{at}, \forall t \geqslant 0.$$

Point d'équilibre: $x^* = 0$

Stabilité: $\lim_{t \mapsto \infty} |x(t) - x^*| = \lim_{t \mapsto \infty} x_0 e^{at}$

- si $a > 0$, $\lim_{t \mapsto \infty} |x(t) - x^*| = \infty$
- si $a < 0$, $\lim_{t \mapsto \infty} [x(t) - x^*| = 0 = x^*$

Le point d'équilibre $x^* = 0$ du système (1) est **globalement E.S.** (c'est à dire quel que soit x_0) si $a < 0$.

Stabilité des points d'équilibre

Critère de stabilité: cas linéaire scalaire complexe

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & ax, \\ x(0) & = & x_0, \end{array} \right. \tag{2}$$

où $a = u + iv \in \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Solution:

$$x(t) = x_0 e^{at}, \ \forall t \geqslant 0.$$

Point d'équilibre: $x^* = 0$

Stabilité: $\lim_{t \mapsto \infty} |x(t) - x^*| = \lim_{t \mapsto \infty} x_0 e^{ut}$

- si $u > 0$, $\lim_{t \mapsto \infty} |x(t) - x^*| = \infty$
- si $u < 0$, $\lim_{t \mapsto \infty} [x(t) - x^*| = 0 = x^*$

Le point d'équilibre $x^* = 0$ du système (2) est **globalement E.S.** (c'est à dire quel que soit x_0) si $u < 0$.

Stabilité des points d'équilibre
Critère de stabilité: cas linéaire de dimension $n > 1$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax, \\ x(0) & = & x_0, \end{array}\right.$$

où A matrice carrée de taille $n \times n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.
La matrice A est **inversible** et **diagonalisable**.

Stabilité des points d'équilibre

Critère de stabilité: cas linéaire de dimension $n > 1$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax, \\ x(0) & = & x_0, \end{array}\right.$$

où A matrice carrée de taille $n \times n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.
La matrice A est **inversible** et **diagonalisable**.

Rappels:

Définition: Matrice inversible
Un matrice carrée A de taille $n \times n$ est dite inversible, si il existe une matrice B de taille $n \times n$ telle que:

$$AB = BA = I_n.$$

La matrice B est appelée inverse de A et est notée A^{-1}.

Stabilité des points d'équilibre

Critère de stabilité: cas linéaire de dimension $n > 1$

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax, \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

où A matrice carrée de taille $n \times n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.
La matrice A est **inversible** et **diagonalisable**.

Rappels:

Définition: Matrice diagonalisable
Une matrice carrée A de taille $n \times n$ est dite **diagonalisable** si il existe une matrice carrée $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible, d'inverse P^{-1}, et une matrice $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonale, telles que:

$$A = PDP^{-1}.$$

P est appelée la **matrice de passage**.

Stabilité des points d'équilibre

Critère de stabilité: cas linéaire de dimension $n > 1$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax, \\ x(0) & = & x_0, \end{array}\right.$$

où A matrice carrée de taille $n \times n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.
La matrice A est **inversible** et **diagonalisable**.

Rappels:

Proposition: Si A est diagonalisable, alors:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

où λ_i, $i = 1 : n$, sont les valeurs propres de A.

Stabilité des points d'équilibre
Critère de stabilité: cas linéaire de dimension $n > 1$

Point d'équilibre: $x^* = 0_n$ car A est inversible

Stabilité:

- A est diagonalisable:

$$\dot{x} = Ax = PDP^{-1}x$$

- Multipliant à gauche par P^{-1}

$$P^{-1}\dot{x} = DP^{-1}x$$

- Changement de variable $y = P^{-1}x$:

$$\dot{y} = Dy \Leftrightarrow \dot{y}_i = \lambda_i y_i,\ \forall i = 1 : n, \Leftrightarrow y_i(t) = y_i(0)e^{\lambda_i t},\ \forall i = 1 : n.$$

Stabilité (suite): Par conséquent:

$$\forall i = 1:n,\ \lim_{t\to\infty} |y_i(t)| = \lim_{t\to\infty} |y_i(0)| e^{\Re(\lambda_i)t} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Re(\lambda_i) < 0 \\ \infty & \text{si } \Re(\lambda_i) > 0, \end{cases}$$

d'où, en notant $p_{i,k}$ le coefficient situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $k^{\text{ème}}$ colonne de P:

$$\begin{aligned} \forall i = 1:n,\ \lim_{t\to\infty} |x_i(t)| &= \lim_{t\to\infty} |(Py)_i(t)| \\ &= \lim_{t\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} y_k(t) \right| \\ &= 0 \text{ si } \Re(\lambda_k) < 0,\ \forall k = 1:n. \end{aligned}$$

Stabilité des points d'équilibre

Critère de stabilité: cas linéaire de dimension $n > 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

où A matrice carrée de taille $n \times n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.
La matrice A est **inversible** et **diagonalisable**.

Point d'équilibre: $x^* = 0_n$ car A est inversible

Stabilité:

> Le point d'équilibre $x^* = 0$ du système (3) est **globalement E.S.** si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative.

Remarque: généralisation

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(x - x_e), \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

où x_e est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ constant.

Unique point d'équilibre: $x^* = x_e$.

Changement de variable $y = x - x_e$:

$$\begin{cases} \dot{y} &= Ay, \\ y(0) &= x_0 - x_e, \end{cases}$$

et on se ramène au système précédent.

Linéarisation autour d'un point d'équilibre

Si x^* point d'équilibre du système d'équations $\frac{dx}{dt} = f(x)$:

$$\frac{d(x - x^*)}{dt} = f(x) - \underbrace{f(x^*)}_{=0} \simeq \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^*)\right]}_{=J_f(x^*)}(x - x^*)$$

avec $J_f(x^*)$ la matrice jacobienne de f en x^*:

$$J_f(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*) \end{bmatrix}$$

Stabilité des points d'équilibre
Cas non linéaire

Théorème de Lyapunov ($1^{ère}$ méthode de Lyapunov)

Soit x^* un point d'équilibre hyperbolique de $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

- Si toutes les valeurs propres de $J_f(x^*)$ sont à partie réelle strictement négative (i.e. $\Re(\lambda_j) < 0, \forall j$), alors le point d'équilibre x^* est **localement exponentiellement stable**.
- Si $J_f(x^*)$ possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre x^* est **instable**.

Remarque: ne permet pas de conclure dans le cas d'une valeur propre à partie réelle égale à 0.

Stabilité des points d'équilibre
Rappel pour le calcul des valeurs propres

Définition: Valeurs propres
$\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de la matrice diagonalisable A, si il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tel que:

$$Av = \lambda v$$

Proposition
Les valeurs propres λ_i d'une matrice diagonalisable A de taille $n \times n$ sont les racines du polynôme caractéristique donné par:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$

Stabilité des points d'équilibre
Rappel pour le calcul des valeurs propres

Cas des matrices 2×2: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\det(A) = ad - bc \quad \text{et} \quad Tr(A) = a + d$$

Stabilité des points d'équilibre
Rappel pour le calcul des valeurs propres

Cas des matrices 2×2: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\det(A) = ad - bc \quad \text{et} \quad Tr(A) = a + d$$

d'où:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (a - \lambda)(d - \lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc \end{aligned}$$

Stabilité des points d'équilibre
Rappel pour le calcul des valeurs propres

Cas des matrices 2×2: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\det(A) = ad - bc \quad \text{et} \quad Tr(A) = a + d$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A sont les racines de $\det(A - \lambda I_2)$ qui s'écrit donc aussi:

$$\det(A - \lambda I_2) = k(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = k\lambda^2 - k(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + k\lambda_1\lambda_2$$

On a donc:

$$\begin{array}{rc} & \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = k\lambda^2 - k(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + k\lambda_1\lambda_2 \\ \Leftrightarrow & k = 1,\ \lambda_1 + \lambda_2 = a + d,\ \lambda_1\lambda_2 = ad - bc \end{array}$$

Stabilité des points d'équilibre

Rappel pour le calcul des valeurs propres

Cas des matrices 2×2: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\det(A) = ad - bc \quad \text{et} \quad Tr(A) = a + d$$

On montre que λ_1 et λ_2 sont à partie réelle strictement négative si et seulement si:

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 0$$
$$\text{et } \lambda_1 \lambda_2 > 0$$

Stabilité des points d'équilibre
Rappel pour le calcul des valeurs propres

Cas des matrices 2×2: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\det(A) = ad - bc \quad \text{et} \quad Tr(A) = a + d$$

Proposition
Les valeurs propres de la matrice carrée A de taille 2×2 sont à partie réelle strictement négative si et seulement si:

$$\begin{aligned} Tr(A) &:= a + d < 0 \\ \text{et } \det(A) &:= ad - cb > 0 \end{aligned}$$

Stabilité des points d'équilibre
Rappel pour le calcul des valeurs propres

Matrices particulières:
Pour les matrices diagonales, triangulaires supérieures ou triangulaires inférieures, les valeurs propres sont les valeurs des éléments de la matrice sur la diagonale.

Exemples:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

➡ valeurs propres = $\{a, b, c\}$

Stabilité des points d'équilibre
Exemple

Modèle de compétition de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} & = & \tilde{r}_1 x_1 (1 - x_1 - a x_2) = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} & = & \tilde{r}_2 x_2 (1 - x_2 - b x_1) = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Valeurs propres de la jacobienne:

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

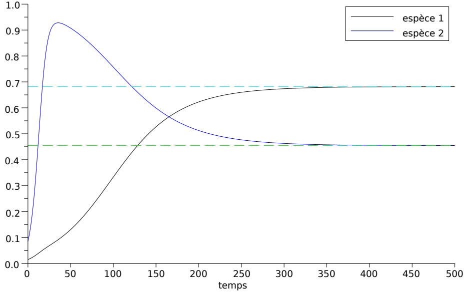
Solutions:

Partie 8: Portrait de phase

Portrait de phase
Définition

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx_1}{dt} & = & f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} & = & f_2(x_1, x_2) \end{array} \right.$$

Tracé classique: x_1 en fonction du temps t et x_2 en fonction du temps t

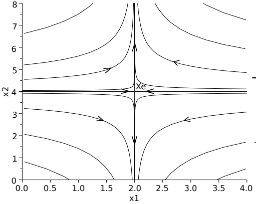


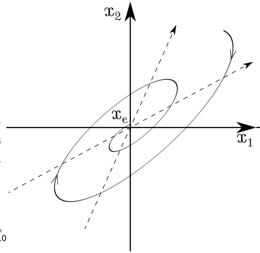
Portrait de phase
Définition

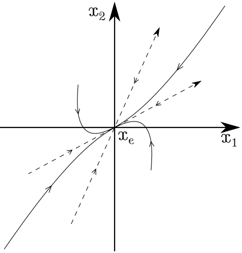
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} & = & f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} & = & f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Portrait de phase: x_1 en fonction de x_2 (ou l'inverse)

- plusieurs simulations sur une seule figure
- visualisation des équilibres stables / instables







Portrait de phase
Exemple
Modèle de compétition de Lotka-Volterra