Modélisation d'écosystèmes II: simulation et équilibre

UE modélisation et quantification

Céline Casenave
UMR INRA-SupAgro 0729 MISTEA, Montpellier France,
celine.casenave@supagro.inra.fr

Plan de la deuxième partie

5. Simulation

6. Points d'équilibre

Partie 5: Simulation

Simulation d'un modèle EDO
Solution analytique: un cas particulier

Dans certains **cas rares**, il est possible de calculer la solution analytique d'un système EDO:

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Exemple: le modèle logistique

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

avec K la capacité d'accueil du milieu, et r le taux de croissance maximum.

Solution analytique: $x(t) = \dfrac{K}{1 + ae^{-rt}}$ avec $a = \dfrac{K - x(0)}{x(0)}$.

Simulation d'un modèle EDO

Solution approchée: les schémas numériques

Le reste du temps:

- calcul d'une **solution approchée**: x_j est une valeur approchée de $x(t_j)$.
- utilisation d'un **schéma numérique**, c'est à dire d'une **formule de récurrence**

Schéma explicite:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + dt \times \Phi(t_n, x_n, dt) \\ t_{n+1} & = & t_n + dt \end{array}\right.$$

Schéma implicite:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + dt \times \Phi(t_n, x_n, {\color{red}x_{n+1}}, dt) \\ t_{n+1} & = & t_n + dt \end{array}\right.$$

Simulation d'un modèle EDO
Différences finies

Rappel: définition de la dérivée

$$\frac{dx}{dt}(t_n) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h}.$$

C'est la pente de la tangente à la courbe $t \mapsto x(t)$ au point $(t_n, x(t_n))$.

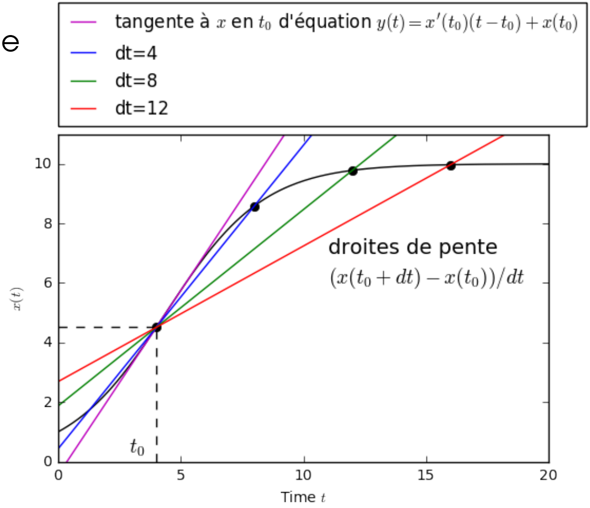
D'où, **l'approximation par différences finies**:

$$\frac{dx}{dt}(t_n) \simeq \frac{x(t_n + dt) - x(t_n)}{dt}$$

pour dt "suffisamment petit".

Simulation d'un modèle EDO
Différences finies

Exemple du modèle logistique

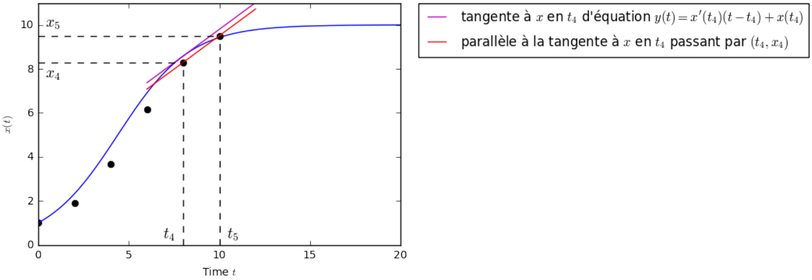


Simulation d'un modèle EDO
Schéma d'Euler explicite

$$\frac{dx}{dt}(t_n) = f(x(t_n)) \Longleftrightarrow \frac{x(t_n+dt)-x(t_n)}{dt} \simeq f(x(t_n))$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} x_{n+1} & = & x_n + dt \times f(x_n) \\ t_{n+1} & = & t_n + dt \end{cases}}$$

Modèle logistique: pas de discrétisation : $dt = 2$

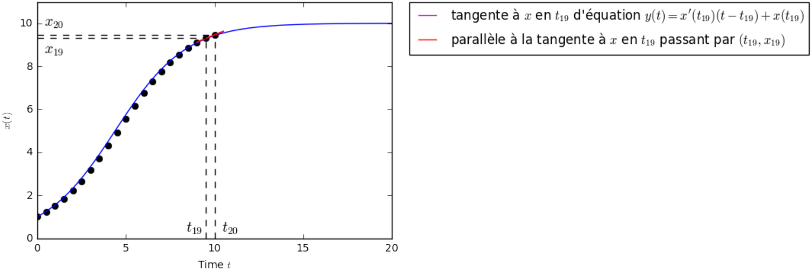


Simulation d'un modèle EDO
Schéma d'Euler explicite

$$\frac{dx}{dt}(t_n) = f(x(t_n)) \Longleftrightarrow \frac{x(t_n+dt) - x(t_n)}{dt} \simeq f(x(t_n))$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + dt \times f(x_n) \\ t_{n+1} &= t_n + dt \end{cases}}$$

Modèle logistique: pas de discrétisation : $dt = 0.5$



Simulation d'un modèle EDO
Simulation sous R

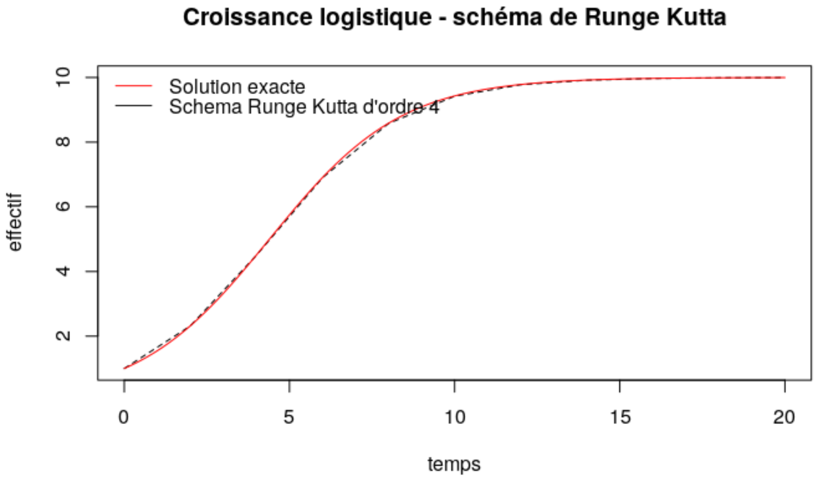
```
# Librarie à utiliser
library(deSolve);

# fonction de second membre du système
# = fonction f de dx/dt=f(x,t)
logistiqueRK = function(t,x,parms) {
    r = parms(1);
    K = parms(2);
    dxsurdt = r*(1-x/K)*x;
    return(list(dxsurdt))
}
```

Simulation d'un modèle EDO
Simulation sous R

```
# paramètres du modèle
r = 0.5 ;
K = 10 ;
# condition initiale
x0 = 1 ;
# vecteur temps
tempsrk4=seq(0,20,by=2.0) ;
# simulation avec rk4 (runge kutta d'ordre 4)
sol=rk4(x0,tempsrk4,logistiqueRK,c(r,K)) ;
# tracé des solutions
plot(sol(,1), sol(,2),xlab="temps",ylab="effectif",type='l');
```

Simulation d'un modèle EDO
Simulation sous R



Modèle de compétition de Lotka-Volterra:
2 populations N_1 et N_2, évoluant dans un milieu fermé:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{dN_1}{dt} & = & r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1 + \alpha_1 N_2}{K_1}\right) \\ \frac{dN_2}{dt} & = & r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2 + \alpha_2 N_1}{K_2}\right) \end{array}\right. ,$$

où:

- r_j = taux de croissance intrinsèque de N_j,
- K_j = capacité d'accueil du milieu pour N_j,
- α_j = l'effet de la présence de la population N_i sur la population N_j.

Simulation d'un modèle EDO
Exemple

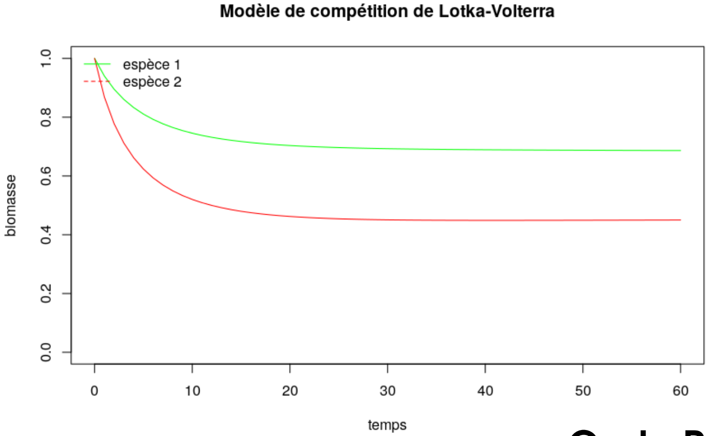
Modèle de compétition de Lotka-Volterra:
2 populations N_1 et N_2, évoluant dans un milieu fermé:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} & = & \tilde{r}_1 x_1 \left(1 - x_1 - a x_2\right) = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} & = & \tilde{r}_2 x_2 \left(1 - x_2 - b x_1\right) = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

avec, pour adimensionnaliser le système:

$$x_1 = \frac{N_1}{K_1},\ x_2 = \frac{N_2}{K_2},\ \tilde{r}_1 = r_1 K_1,\ \tilde{r}_2 = r_2 K_2,\ a = \alpha_1 \frac{K_2}{K_1},\ b = \alpha_2 \frac{K_1}{K_2},$$

Simulation d'un modèle EDO
Exemple: simulation sous R



Code R

Partie 6: Points d’équilibre

Points d'équilibre
Définition

2 notions centrales dans l'analyse des systèmes dynamiques:

- les **états d'équilibre**
- la **stabilité** des états d'équilibre.

Points d'équilibre

Définition

2 notions centrales dans l'analyse des systèmes dynamiques:

- les **états d'équilibre**
- la **stabilité** des états d'équilibre.

Définition: Point d'équilibre

$x^* \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre du système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

si:

$$\boxed{f(x^*) = 0}$$

Interprétation: "Si le système est dans un état d'équilibre, alors il n'évolue plus (c'est à dire que la dérivée $\frac{dx}{dt}$ est nulle)."

Points d'équilibre
Exemple

Modèle de compétition de Lotka-Volterra:
Points d'équilibre = valeurs (x_1^*, x_2^*) telles que $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$, c.à.d:

$$\begin{cases} 0 & = & \tilde{r}_1 x_1^* \left(1 - x_1^* - a x_2^*\right) \\ 0 & = & \tilde{r}_2 x_2^* \left(1 - x_2^* - b x_1^*\right) \end{cases}$$

Solutions: